

Hoja de ejercicios 4

Ejercicio 1: Sea (X, Y) el vector aleatorio bidimensional con variables independientes tales que:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

Sea $U = X + Y$ y $V = X - Y$. Calcular la densidad conjunta (U, V) y sus marginales.

Ejercicio 2: Sean X e Y variables aleatorias independientes, ambas con distribución $\exp(1)$. Calcular la densidad conjunta y las densidades marginales de $U = \frac{X}{X+Y}$ y $V = X + Y$.

Ejercicio 3: Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x + y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

Calcular la densidad de $U = X + Y$, eligiendo $V = X$ como variable auxiliar.

Ejercicio 4: Repetir el ejercicio anterior eligiendo esta vez $V = Y$ como variable auxiliar.

Ejercicio 5: Supongamos que dos personas quedan para verse entre las 5 y las 6 de la tarde en un lugar concreto y se ponen de acuerdo en que no esperarán más de 10 minutos. Si llegan aleatoriamente entre las 5 y las 6 de la tarde ¿Cual es la probabilidad de que se encuentren?

Ejercicio 6: Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad uniforme en la región del plano limitada por $x = 1$, $x = -1$, $y = x + 1$, $y = x - 1$

Calcular:

- i) $P(X * Y > 0)$
- ii) $f_{Y/X=\frac{1}{2}}(y)$
- iii) $P(Y > \frac{1}{2} / X = \frac{1}{2})$

Ejercicio 7: Supongamos que en un medicamento la concentración de una determinada sustancia química es una variable aleatoria X con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{si } x \in (0, 2) \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

Supongamos que la concentración de otra sustancia es independiente de la concentración de la primera y se distribuye igual:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}y^2 & \text{si } y \in (0, 2) \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

Se pide:

- i) $f(x, y)$
- ii) $P(X = Y)$
- iii) $P(X > Y)$
- iv) $P(X + Y \leq 1)$